14. Hallilsoy M. New metrics for spinning spheroids in general relativity / M. Hallilsoy // Journal of Mathematical Physics. – 1992. – Vol. 33, № 12. – P. 4225.

15. Pedersen A.V. Aspects of Black Hole Physics / A.V. Pedersen. – Access mode: http://www.nbi.dk/ harmark/blackholephysicsv2.pdf.

16. Arnold V. I. Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics / V. I. Arnold // Russian Mathematical Surveys. – 1963. – Vol. 18. – P. 85–191.

17. Poincare H. Sur un theoreme de geometrie / H. Poincare // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. – 1912. – Vol. 33. – P. 375–407.

18. Laskar J. Frequency analysis of a dynamical system / J. Laskar // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. – 1993. – Vol. 56. – P. 191–196.

MATHEMATICAL AND COMPUTER MODELING OF CHAOS IN GRAVITATIONAL FIELDS WITH AXIAL SYMMETRY IN THE PRESENCE OF NAKED SINGULARITY

D.V. Gal'tsov, K.V. Kobialko

*The problem of motion of test bodies in spaces that do not allow separation of variables in the geodesic equation is discussed. Such situations are typical for Weil metrics, in which there are only two commuting Killing vectors and there is no Killing tensor of the second rank. Using the example of the Zipoy-Voorhis metric with the NUT parameter, it is shown that the motion becomes chaotic in some areas of the parameters, as illustrated by the Poincare sections. This behavior is typical of metrics of collapsars, different from the Kerr metric, which violates the principle of cosmic censorship.*

Keywords: geodesic, Zipoy-Voorhis metric, chaos, naked singularity.

УДК 514.822

# НЕМИНИМАЛЬНО ГРАВИТАЦИОННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ И НЕМЕТРИЧНОСТЬ

Д.В. Гальцов[1], С.М. Жидкова[2]

1 *galtsov@phys.msu.ru*; Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова; Казанский федеральный университет

2 *kfizik@yandex.ru*; Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

*Взаимодействие материальных полей с гравитацией может рассматриваться как в рамках метрического формализма, используя связность согласованную с метрикой, так и в формализме первого порядка, в котором связность вводится как независимое поле, динамика которого определяется из действия. При этом, если это взаимодействие неминимально, то мы можем получать существенно различные теории. Здесь мы обсуждаем случай неминимально связанного скалярного поля в рамках укороченной модели Хорндески, рассматривавшейся ранее Сушковым и другими авторами в контексте космологии. Мы показываем, что в случае, когда константа неминимального взаимодействия мала, теории первого и второго порядка совпадают, но в пределе сильной неминимальной связи они существенно различны, при этом в формализме первого порядка в полевых уравнениях остаются высшие производные.*

**Ключевые слова**: неминимально гравитационное взаимодействие, неметричность.

**Введение**

В последнее время возник интерес к скалярно-тензорным теориям с неминимальной гравитационной связью через производные [1] . Такие теории относятся к классу, рассмотренному Хорндески [2] и привлекательны тем, что, несмотря на присутствие в действии высших производных, таковые отсутствуют в полевых уравнениях, что обеспечивает отсутствие духов Остроградского. В общем случае в таком действии могут появляться члены, содержащие неминимально связанные с кривизной производные скалярного поля $R\phi_{,\mu}\phi^{,\mu}$ и $R_{\mu\nu}\phi^{,\mu}\phi^{,\nu}$. В метрическом формализме такие модели проявляют интересные космологические свойства [1, 3, 4, 5].

Помимо метрического формализма (2-го порядка), существует также другой подход для получения уравнений движения, известный как формализм Палатини (1-го порядка) в котором метрика и связность являются независимыми переменными, т.к. из дифференциальной геометрии не следует, что связность должна выражаться через метрику каким-то конкретным образом. В неминимально связанных теориях может возникать вторая метрика, в этом случае, связность оказывается согласованной с этой метрикой. В [6] показано, что при исследовании каждой из теорий содержащих в действии слагаемые $\kappa_1 R\phi_{,\mu}\phi^{,\mu}$ и $\kappa_2 R_{\mu\nu}\phi^{,\mu}\phi^{,\nu}$ по отдельности вторая метрика оказывается конформно связанной с физической метрикой. В данной работе показано, что при включении в действие обоих слагаемых одновременно с выбором $\kappa \equiv \kappa_2 = -2\kappa_1$ так чтобы образовался тензор Эйнштейна, конформная связь нарушается и появляется дисформный член.

В большинстве работ при использовании формализма Палатини подразумевается симметричность связности по последним двум индексам. Однако, в самом общем случае может присутствовать и кручение $T^{\lambda}_{\mu\nu} = 2\tilde{\Gamma}^{\lambda}_{[\mu\nu]}$. В работе [7] было замечено, что для действия Эйнштейна-Гильберта в формализме 1-го порядка добавление кручения эквивалентно калибровочному преобразованию. В нашей работе показано, что для действия с неминимальным членом $\kappa G_{\mu\nu}\phi^{,\mu}\phi^{,\nu}$ добавление кручения будет эквивалентно такому же калибровочному преобразованию. Это позволяет нам отбросить тензор кручения при дальнейшем исследовании модели.

В статье найдено, что в приближении слабого скалярного поля эффективный ТЭИ получается таким же как и при исследовании теории в метрическом формализме. Далее была исследована плоская FRW модель в режиме медленного скатывания: получено условие при котором происходит расширение Вселенной, посчитано число e-фолдингов и обнаружено, что при $\kappa < 0$ возможно избежать "суперпланковский"режим. Все эти оценки в режиме медленного скатывания отличаются от полученных в [8], где не был учтен дисформный фактор во второй метрике.

## 1. Уравнения движения в формализме Палатини. Вторая метрика.

Рассмотрим действие с неминимальной связью скалярного поля $\phi$ с тензором Риччи:

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\Big\{\tilde{R} - [\varepsilon g_{\mu\nu} + \kappa\tilde{G}_{\mu\nu}]\phi^{,\mu}\phi^{,\nu} - 2V(\phi)\Big\} + S_m[g_{\mu\nu}, \psi], \qquad (1)$$

где все величины с тильдами зависят от связности, на которую не наложено никаких априорных условий, $\psi$ обозначает прочие поля материи, а $\tilde{G}_{\mu\nu}$ - тензор Эйнштейна:

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = \tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\tilde{R} \tag{2}$$

Напомним, что в метрическом формализме при вариации по метрике получалось следующее уравнение движения:

$$G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \kappa\Theta_{\mu\nu}, \tag{3}$$

где

$$\Theta_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi R + 2\nabla_\alpha\phi\nabla_{(\mu}\phi R^\alpha_{\nu)} - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 G_{\mu\nu} + \nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi R_{\mu\alpha\nu\beta} +$$

$$+\nabla_\mu\nabla^\alpha\phi\nabla_\nu\nabla_\alpha\phi - \nabla_\mu\nabla_\nu\phi\Box\phi + g_{\mu\nu}(-\frac{1}{2}\nabla^\alpha\nabla^\beta\phi\nabla_\alpha\nabla_\beta\phi + \frac{1}{2}(\Box\phi)^2 - \nabla_\alpha\phi\nabla_\beta\phi R^{\alpha\beta}), \tag{4}$$

а уравнение Клейна-Гордона (вариация по полю $\phi$):

$$\left[g^{\mu\nu} + \kappa G^{\mu\nu}\right]\nabla_\mu\nabla_\nu\phi = 0. \tag{5}$$

В формализме Палатини считаем тензор Риччи $\tilde{R}_{\mu\nu}$ не зависящим от метрики, который уже не является симметричным в общем случае. Производя вариацию действия (1) по метрике приходим к следующему уравнению движения:

$$T_{\mu\nu} = \tilde{G}_{\mu\nu} + \Big[\frac{\kappa}{2}\tilde{G}_{\mu\nu}\phi_{,\lambda}\phi^{,\lambda} + \frac{\kappa}{2}\tilde{R}_{\alpha\beta}g_{\mu\nu}\phi^{,\alpha}\phi^{,\beta} + \frac{\kappa}{2}\tilde{R}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \kappa\tilde{R}_{(\mu\lambda}\phi^{,\lambda}\phi_{,\nu)} -$$

$$-\kappa\tilde{R}_{\lambda(\mu}\phi^{,\lambda}\phi_{,\nu)} + \frac{\varepsilon}{2}g_{\mu\nu}\phi_{,\lambda}\phi^{,\lambda} - \varepsilon\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} + g_{\mu\nu}V(\phi)\Big], \tag{6}$$

где тензор энергии-импульса полей материи

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_m[g,\psi]}{\delta g^{\mu\nu}}. \tag{7}$$

Заметим, что ТЭИ (6) отличается от полученного в [8], тем, что он симметризован по индексам $\mu$ и $\nu$ в силу симметричности метрики.

Будем теперь варьироать действие по независимой связности (несимметричной с присутствием кручения $T^\lambda_{\mu\nu} = 2\Gamma^\lambda_{[\mu\nu]}$). Тогда получим уравнение:

$$-\nabla_\lambda A^{\mu\nu} - A^{\mu\nu}(\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\nabla_\lambda g_{\alpha\beta} - T^\rho_{\rho\lambda}) + \delta^\nu_\lambda(\nabla_\rho A^{\mu\rho} +$$

$$+\frac{1}{2}A^{\mu\rho}g^{\alpha\beta}\nabla_\rho g_{\alpha\beta} - A^{\mu\rho}T^\sigma_{\sigma\rho}) + A^{\mu\rho}T^\nu_{\lambda\rho} = 0, \tag{8}$$

где введено обозначение

$$A^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}(1 + \frac{1}{2}\kappa\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha}) - \kappa\phi^{,\mu}\phi^{,\nu}. \tag{9}$$

Проведя некоторые манипуляции с (8), можно прийти к уравнению:

$$\nabla_\lambda h_{\mu\nu} - \frac{1}{3}h_{\mu\nu}T^\rho_{\rho\lambda} - \frac{1}{3}\delta^\rho_\mu h_{\nu\lambda}T^\sigma_{\sigma\rho} + \delta^\rho_\mu h_{\nu\beta}T^\beta_{\lambda\rho} = 0, \tag{10}$$

откуда находим связность:

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} h^{\lambda\rho}(\partial_\mu h_{\rho\nu} + \partial_\nu h_{\mu\rho} - \partial_\rho h_{\mu\nu}) - \frac{1}{3}\delta^{\lambda}_{\mu} T^{\rho}_{\rho\nu}. \tag{11}$$

След кручения можно выразить через некоторый 4-вектор: $T^{\rho}_{\nu\rho} = -3B_\nu$. Следовательно, связность может быть выражена в виде символов Кристоффеля от новой метрики $h_{\mu\nu}$ (обозначим их $\widetilde{\{^{\lambda}_{\mu\nu}\}}$) с точностью до калибровочного преобразования:

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \widetilde{\{^{\lambda}_{\mu\nu}\}} + B_\nu \delta^{\lambda}_{\mu}. \tag{12}$$

Симметричная связность получается выбором калибровки $B_\nu = 0$, в дальнейших вычислениях ограничимся этим случаем. Можно также заметить, что в теории, где скалярное поле связано с гравитацией без ковариантной производной:

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\Big\{\tilde{R} + \xi\tilde{R}\phi^2 + \kappa\nabla^{\alpha}\phi\nabla_{\alpha}\phi + V(\phi)\Big\} \tag{13}$$

тоже получается, что кручение сводится к калибровочному преобразованию (12). Действительно, в этом случае вариация по несимметричной связности дает то же уравнение (8) где теперь матрица $A^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}(1+\xi\phi^2)$. Дальнейшие вычисления проводятся точно также, отличие будет в том, что вторая метрика для действия (13) будет конформно связанной с физической: $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(1+\xi\phi^2)$.

Перейдем теперь к рассмотрению симметричной связности в теории (1). При вариации $S$ по связности приходим к уравнению:

$$\tilde{\nabla}_{\lambda}\Big\{\sqrt{-g}\Big[g^{\mu\nu}\big(1+\frac{1}{2}\kappa\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha}\big) - \kappa\phi^{,\mu}\phi^{,\nu}\Big]\Big\} = 0, \tag{14}$$

оно отличается от полученного в [8] в последнем члене, который не был учтен в [8]. Введем симметричную матрицу

$$(A)^{\mu}_{\cdot\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}(1+\frac{\kappa}{2}\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha}) - \kappa\phi^{,\mu}\phi_{,\nu}, \tag{15}$$

тогда из (14) получим:

$$\tilde{\nabla}_{\lambda}(\sqrt{-g}A^{\mu\nu}) = 0. \tag{16}$$

Будем искать вторую метрику $h^{\mu\nu}$, такую что $\tilde{\nabla}_{\lambda}(\sqrt{-h}h^{\mu\nu}) = 0$, тогда из (16) находим вторую метрику, с которой будет согласована связность:

$$h^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{detA}} g^{\nu\lambda} A^{\mu}_{\cdot\lambda}, \tag{17}$$

$$h_{\mu\nu} = \sqrt{detA}\, g_{\lambda\mu}(A^{-1})^{\lambda}_{\cdot\nu}. \tag{18}$$

где $A^{-1}$ - обратная к $A$ матрица, которая существует в общем случае, т.к. $detA \neq 0$ тождественно. Обратную матрицу $(A^{-1})_{\mu\nu}$ можно явно вычислить с помощью формулы Шермана-Моррисона:

$$(A^{-1})_{\mu\nu} = \frac{g_{\mu\nu}}{1+\frac{1}{2}\kappa\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha}} + \frac{\kappa\phi_{,\mu}\phi_{,\nu}}{1-\frac{1}{4}\kappa^2\big(\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha}\big)^2}. \tag{19}$$

Уравнение Клейна-Гордона в формализме Палатини уже может содержать третьи производные от метрики, поскольку для тензора Эйнштейна уже не будет выполняться тождество Бьянки и $\nabla_\mu \tilde{G}^{\mu\nu} \neq 0$, т.к. в выражение для $\tilde{G}^{\mu\nu}$ входит как новая метрика $h_{\mu\nu}$ так и исходная $g_{\mu\nu}$:

$$\tilde{\nabla}_\mu \left(\sqrt{-g}(\kappa G^{\mu\nu}\phi_{,\nu} + \varepsilon\phi^{,\mu})\right) - \sqrt{-g}V'(\phi) = 0. \tag{20}$$

## 2. Приближение слабого поля

Для второй метрики (17) коэффициенты связности в приближении слабого скалярного поля примут вид:

$$\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \kappa\nabla_\mu\nabla_\nu\phi\nabla^\lambda\phi, \tag{21}$$

Тензор Риччи в таком случае запишется следующим образом:

$$\tilde{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \kappa\left[\nabla_\mu\nabla_\nu\phi\nabla_\alpha\nabla^\alpha\phi - \nabla_\mu\nabla_\alpha\phi\nabla_\nu\nabla^\alpha\phi + \nabla^\alpha\phi\nabla_\beta\phi R^\beta_{\mu\nu\alpha}\right], \tag{22}$$

а скалярная кривизна:

$$\tilde{R} = R + \kappa\left[(\nabla_\alpha\nabla^\alpha\phi)^2 - \nabla_\alpha\nabla_\beta\phi\nabla^\alpha\nabla^\beta\phi + \nabla^\alpha\phi\nabla_\beta\phi R^{\beta\gamma}_{\cdot\cdot\gamma\alpha}\right], \tag{23}$$

следовательно, тензор Эйнштейна будет равен:

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + \kappa\Big[&\nabla_\mu\nabla_\nu\phi\nabla_\alpha\nabla^\alpha\phi - \nabla_\mu\nabla_\alpha\phi\nabla_\nu\nabla^\alpha\phi + \nabla^\alpha\phi\nabla_\beta\phi R^\beta_{\mu\nu\alpha} - \\ &-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\big((\nabla_\alpha\nabla^\alpha\phi)^2 - -\nabla_\alpha\nabla_\beta\phi\nabla^\alpha\nabla^\beta\phi - \nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi R_{\beta\alpha}\big)\Big].\end{aligned} \tag{24}$$

При подстановке этих выражений в уравнение (6) мы приходим к уравнению (3) которое получается при вариации по метрике в формализме 2-го порядка. Т.е. в первом приближении при разложении по скалярному полю уравнения движения в обоих формализмах совпадают.

## 3. Приближение сильного поля

Рассмотрим теперь предел сильного поля, когда $|\phi| \gg 1$. В этом случае связность примет вид:

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \big(\delta^\lambda_{(\mu} - 2\frac{\nabla^\lambda\phi\nabla_{(\mu}\phi}{G}\big)\partial_{\nu)}\ln G - \\ -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\big(g^{\lambda\rho} - 2\frac{\nabla^\lambda\phi\nabla^\rho\phi}{G}\big)\partial_\rho\ln G + 2\frac{\nabla^\lambda\phi\nabla_\mu\nabla_\nu\phi}{G},\end{aligned} \tag{25}$$

где мы ввели обозначение $G = \nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi$. Уравнения движения в таком случае будут содержать дополнительные слагаемые помимо тех, что входят в метрические уравнения движения:

$$\kappa\Big[\frac{1}{2}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi R-2\nabla_\alpha\phi\nabla_{(\mu}\phi R^{\alpha}_{\nu)}+\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2G_{\mu\nu}+\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi R_{\mu\alpha\nu\beta}-$$
$$-\nabla_\mu\nabla^\alpha\phi\nabla_\nu\nabla_\alpha\phi+\nabla_\mu\nabla_\nu\phi\Box\phi+g_{\mu\nu}(\frac{1}{2}\nabla^\alpha\nabla^\beta\phi\nabla_\alpha\nabla_\beta\phi-\frac{1}{2}(\Box\phi)^2+$$
$$+\nabla_\alpha\phi\nabla_\beta\phi R^{\alpha\beta})+\frac{3}{4}\frac{\nabla_\mu G\nabla_\nu G}{G}-2\frac{\Box\phi\nabla_{(\mu}\phi\nabla_{\nu)}G}{G}+$$
$$+2\frac{\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi\nabla_{(\mu}\phi\nabla_{\nu)}\nabla_\alpha\nabla_\beta\phi}{G}-4\frac{\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha G\nabla_{(\mu}\phi\nabla_{\nu)}G}{G^2}+$$
$$+\frac{7}{4}\frac{\nabla_\alpha G\nabla^\alpha G\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi}{G^2}-\frac{5}{8}\frac{g_{\mu\nu}\nabla^\alpha G\nabla_\alpha G}{G}-g_{\mu\nu}\frac{\Box\phi\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha G}{G}-$$
$$-g_{\mu\nu}\frac{\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi\nabla^\gamma\phi\nabla_\alpha\nabla_\beta\nabla_\gamma\phi}{G}+4\frac{\nabla_\alpha\nabla^\beta\phi\nabla^\alpha\phi\nabla_{(\mu}\phi\nabla_{\nu)}\nabla_\beta\phi}{G}-$$
$$-4\frac{\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi\nabla^\gamma\phi\nabla_{(\mu}\phi R_{\nu)\alpha\beta\gamma}}{G}+2\frac{\Box\phi\nabla_\alpha G\nabla^\alpha\phi\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi}{G^2}+$$
$$+2\frac{\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi\nabla^\gamma\phi\nabla_\alpha\nabla_\beta\nabla_\gamma\phi\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi}{G^2}+\frac{5}{4}\frac{g_{\mu\nu}\nabla^\alpha G\nabla^\beta G\nabla_\alpha\phi\nabla_\beta\phi}{G^2}-$$
$$-g_{\mu\nu}\frac{\nabla_\alpha\nabla^\gamma\phi\nabla_\beta\nabla_\gamma\phi\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi}{G}+g_{\mu\nu}\frac{\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi\nabla^\gamma\phi\nabla^\delta\phi R_{\alpha\beta\gamma\delta}}{G}+$$
$$+g_{\mu\nu}\frac{\Box\phi\nabla_\alpha\nabla_\beta\phi\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi}{G}-\frac{\nabla_\alpha\nabla^\beta\phi\nabla^\alpha\nabla_\beta\phi\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi}{G}-$$
$$-\frac{\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi R_{\alpha\beta}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi}{G}-\frac{\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi\nabla_\alpha G\nabla_\beta G\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi}{G^3}+$$
$$+\frac{(\Box\phi)^2\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi}{G}\Big]+\frac{\varepsilon}{2}g_{\mu\nu}\phi_{,\lambda}\phi^{,\lambda}-\varepsilon\phi_{,\mu}\phi_{,\nu}. \tag{26}$$

Итак, для случая когда доминирует скалярное поле уравнения движения в двух формализмах существенно отличаются. Кроме того, можно заметить, что уравнения движения в общем случае содержит третьи производные скалярного поля, что приводит к появлению духов и делает теорию физически некорректной. Духи также могут появляться в уравнении Клейна-Гордона, которое может содержать третьи производные от метрики и вплоть до четвертых производных от скалярного поля.

## 4. Плоская FRW модель в режиме медленного скатывания

Если теперь рассмотреть однородное поле $\phi(t)$ на фоне плоской FLRW геометрии, т.е. с метрикой

$$g_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&a^2(t)&0&0\\0&0&a^2(t)&0\\0&0&0&a^2(t)\end{pmatrix}, \tag{27}$$

то вводя замену

$$f=1-\frac{1}{2}\kappa\dot\phi^2,\qquad q=1+\frac{1}{2}\kappa\dot\phi^2, \tag{28}$$

после некоторых вычислений находим, что модифицированная метрика примет вид

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -q^{-1/2}f^{3/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f^{1/2}q^{1/2}a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f^{1/2}q^{1/2}a^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f^{1/2}q^{1/2}a^2(t) \end{pmatrix}. \qquad (29)$$

Для того, чтоб новая метрика оставалась действительной, константа связи $\kappa$ должна удовлетворять условиям

$$-\frac{2}{\dot{\phi}^2} < \kappa < \frac{2}{\dot{\phi}^2}. \qquad (30)$$

Таким образом, в режиме быстрого скатывания $|\dot{\phi}| \gg 1$ константа $\kappa$ по модулю близка к нулю, а в случае медленного скатывания $0 < |\dot{\phi}| \ll 1$, $|\kappa|$ может принимать довольно большие значения.

В формализме Палатини со второй метрикой Уравнение Клейна-Гордона примет вид:

$$(\kappa\tilde{G}_{00} - \varepsilon)\ddot{\phi} - 3H(\kappa\frac{\tilde{G}_{ii}}{a^2} + \varepsilon)\dot{\phi} + \kappa g^{\mu\alpha}\dot{\phi}\nabla_\mu \tilde{G}_{\alpha 0} - V' = 0, \qquad (31)$$

где величины с тильдами посчитаны для второй метрики $h_{\mu\nu}$, а знак $\nabla$ обозначает ковариантную производную по исходной метрики $g_{\mu\nu}$.

Рассмотрим теперь подробнее режим медленного скатывания. В этом случае $0 < |\dot{\phi}| \ll 1$, а также будем считать, что $|\ddot{\phi}| \ll |\dot{\phi}|$. В этом приближении из уравнения состояния

$$w_{eff} = \frac{p_{tot}}{\rho_{tot}}, \qquad (32)$$

где полные плотность и давление

$$\rho_{tot} = \rho_m + \rho_\phi, \qquad (33)$$

$$p_{tot} = p_m + p_\phi, \qquad (34)$$

причем, плотность и давление скалярного поля равны:

$$\rho_\phi = \frac{\varepsilon}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \qquad (35)$$

$$p_\phi = \frac{\varepsilon}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \qquad (36)$$

Находим:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6}\rho_{tot}\Big[1 - \frac{3}{2}\kappa\dot{\phi}^2 + 3w_{eff}(1 - \frac{1}{2}\kappa\dot{\phi}^2)\Big]. \qquad (37)$$

Для того чтобы происходило расширение необходимо

$$w_{eff} \leq -\frac{1}{3}(1 - \kappa\dot{\phi}^2). \qquad (38)$$

Как было сказано ранее,в режиме медленного скатывания $|\kappa|$ может принимать большие значения и $w_{eff}$ будет слегка отличаться от $-\frac{1}{3}$. Модифицированное уравнение Фридмана в режиме медленного скатывания таково:

$$H^2 = \frac{\rho_{tot}}{3}\big[1 - \frac{3}{2}\kappa\dot{\phi}^2\big]. \qquad (39)$$

Теперь остановимся на этапе ранней Вселенной, когда скалярное поле управляет динамикой инфляции. В этом случае во Вселенной преобладает плотность скалярного поля, для описания подходит режим медленного скатывания и уравнение Фридмана приобретает форму:

$$H^2 = \frac{\rho_\phi}{3M_p^2}\left[1-\frac{3}{2}\kappa\dot{\phi}^2\right] \approx \frac{1}{3}\frac{V(\phi)}{M_p^2}, \tag{40}$$

где предполагается выполнение условия $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$. Здесь в уравнение была введена константа связи $8\pi G_N = M_p^2$. Из этого уравнения следует, что

$$\dot{H} \simeq \frac{V'(\phi)\dot{\phi}}{6M_p^2 H} \simeq \frac{\sqrt{3}V'(\phi)\dot{\phi}}{6\sqrt{V(\phi)}M_p}. \tag{41}$$

Из уравнения Клейна-Гордона, полагая, что в режиме медленного скатывания $\ddot{\phi} \simeq 0$ и $|\ddot{H}| \ll |H\dot{H}| \ll |H^3|$, находим:

$$\dot{\phi} = -\frac{V'(\phi)}{3H\left[\varepsilon-\kappa(2\dot{H}+3H^2)\right]}. \tag{42}$$

Теперь учитывая значение $\dot{\phi}$ можно записать:

$$\dot{H} \simeq -\frac{\left(V'(\phi)\right)^2}{18H^2M_p^2\left[\varepsilon-\kappa(2\dot{H}+3H^2)\right]}. \tag{43}$$

Число e-фолдингов в эпоху инфляции определяется по формуле $N = \ln(a_f/a_i) = \int_{t_i}^{t_f} H dt$ где индексы $i$ и $f$ означают начало и конец инфляционной фазы. Из уравнений (42) и (40) можно заметить, что $Hdt = -\frac{V(\phi)}{V'(\phi)M_p^2}\left[\varepsilon-\kappa(2\dot{H}+V(\phi)/M_p^2)\right]d\phi$. Т.к. в течение инфляции значение $\dot{H}$ в режиме медленного скатывания, как это видно из (41) практически остается константой, то его можно вынести за знак интегрирования. Следовательно:

$$N \simeq -\frac{(\varepsilon-2\kappa\dot{H})}{M_p^2}\int_{\phi_i}^{\phi_f}\frac{V(\phi)}{V'(\phi)}d\phi + \frac{\kappa}{M_p^4}\int_{\phi_i}^{\phi_f}\frac{V^2(\phi)}{V'(\phi)}d\phi. \tag{44}$$

На самом деле, в силу того, что $V(\phi)/M_p^2 \simeq 3H^2$ и замечая, что в условиях ускоренного расширения $2\dot{H}+3H^2 = 2\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 \gg H^2$ получаем, что коэффициент перед $\kappa$ в формуле для $Hdt$ больше нуля в течение почти всей эпохи инфляции. Можно приближенно записать:

$$N \simeq \frac{(\varepsilon-2\kappa\ddot{a}/a)}{M_p^2}\int_{\phi_f}^{\phi_i}\frac{V(\phi)}{V'(\phi)}d\phi. \tag{45}$$

Если теперь ограничиться рассмотрением полей для которых $\varepsilon = 1$, то из последнего уравнения можно заметить, что условие $\kappa > 0$ уменьшает количество инфляции по сравнению с классическим случаем ($\kappa = 0$), а условие $\kappa < 0$ наоборот увеличивает количесво инфляции по сравнению с классическим пределом (ОТО).

В случае потенциалов со степенной зависимостью от поля $V(\phi) = V_0\phi^n$ число e-фолдингов в предположении $\phi_f = 0$ будет

$$N \simeq \frac{1-2\kappa\dot{H}}{2nM_p^2}\phi_i^2 - \frac{\kappa V_0}{M_p^4 n(n+2)}\phi_i^{n+2}. \tag{46}$$

Для классического случая ОТО $N^{cl} = \frac{\phi_i^2}{2nM_p^2}$, таким образом, мы можем выразить $N$ через $N^{cl}$ следующим образом:

$$N \simeq \left(1 - 2\kappa\dot{H} - \frac{2\kappa V(\phi_i)}{M_p^2(n+2)}\right)N^{cl}, \tag{47}$$

откуда, учитывая (40), несложно заметить, что $N > N^{cl}$ при $\kappa < 0$ и $N < N^{cl}$ при $\kappa > 0$.

Введем один из параметров медленного скатывания $\epsilon_v$

$$\epsilon_v = -\frac{\dot{H}}{H^2}, \tag{48}$$

который в режиме медленного скатывания должен удовлетворять условию $\epsilon_v \ll 1$. В классическом случае ($\kappa = 0$) этот параметр равен $\epsilon_v^{cl} = \frac{M_p^2 n^2}{2\phi^2}$, а значит в классическом случае поле $\phi$ должно удовлетворять условию $\phi \gg M_p$ (считая $|n| > \sqrt{2}$), т.е. имеет место "суперпланковский"режим. В нашем же случае $\kappa \neq 0$ из условия $\epsilon_v < 1$ следует

$$\frac{|n|M_p}{\sqrt{2}\sqrt{1-\kappa(2\dot{H}+3H^2)}} < \phi. \tag{49}$$

Из последнего условия видно, что при $\kappa < 0$ "суперпланковский"режим можно избежать если

$$\kappa < -\frac{(n^2-2)}{2(2\dot{H}+3H^2)}. \tag{50}$$

Так, например, для потенциалов типа $V \sim \phi^{-2}$ и $V \sim \phi^2$ это условие дает $\kappa < -\frac{1}{2\dot{H}+3H^2}$, а для потенциала $V \sim \phi^4$ - $\kappa < -\frac{7}{2\dot{H}+3H^2}$. При $\kappa > 0$ нет возможности избежать "суперпланковсий"режим, и он, как видно из (50), только возрастает.

## 5. Заключение

В работе было проведено исследование теории с неминимально связанным членом $G_{\mu\nu}\phi^{,\mu}\phi^{,\nu}$ в формализме Палатини. Показано, что кручение из теории можно исключить калибровочным преобразованием, поэтому далее использовалась симметричная по нижним индексам связность. Найдено, что в первом порядке при разложении по неминимальности получаются те же уравнения что и в метрическом формализме. В случае же когда скалярное поле играет доминирующую роль, уравнения движения заметно отличаются от метрических и кроме того в них появляются высшие производные. В формализме 1-го порядка помимо физической метрики появляется вторая метрика, которая в отличие от результатов большинства предыдущих работ на данную тему [6, 9, 10] оказалась не связанной с исходной метрикой конформным преобразованием. Для плоской FRW модели в режиме медленного скатывания найдены условия расширения и рассчитана поправка к числу e-фолдингов по сравнению с ОТО. Также было показано, что в режиме медленного скатывания при $\kappa < 0$ возможно избежать "суперпланковский"режим. Эти результаты отличаются от полученных в [8] где не было учтено наличие дисформного члена во второй метрике.

Работа поддержана РФФИ в рамках проекта 17-02-01299а, а также государственной программой развития Казанского федерального университета.

**Литература**

1. Charmousis C. General Second-Order Scalar-Tensor Theory and Self-Tuning / C. Charmousis, E.J. Copeland, A. Padilla, P.M. Saffin // Physical Review Letters. – 2012. – № 108. – P. 051101.

2. Horndeski G.W. Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space / G.W. Horndeski // International Journal of Theoretical Physics. – 1974. — Vol. 10. – P. 363–384.

3. Sushkov S.V. Exact cosmological solutions with nonminimal derivative coupling / S.V. Sushkov // Physical Review D. – 2009. – Vol. 80, № 10. – P.103505.

4. Sushkov S. Scalar wormholes with nonminimal derivative coupling / S. Sushkov, R. Korolev // Classical and Quantum Gravity. – 2012. – № 29. – P. 085008.

5. Granda L.N. General non-minimal kinetic coupling to gravity / L. N. Granda and W. Cardona //Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. – 2010. – Vol. 2010. – P. 021.

6. Luo X.X. Non-minimal derivatively coupled quintessence in the Palatini formalism / X.X. Luo, P. Wu, H. Yu // Astrophysics and Space Science. – 2014. – Vol. 350, № 2. – P. 831–837.

7. Bernal A.N. On the (non-)uniqueness of the Levi-Civita solution in the Einstein–Hilbert–Palatini formalism / A.N. Bernal, B. Janssen, A. Jimenez-Cano, J.A. Orejuela, M. Sanchez, P. Sanchez-Moreno // Physics Letters B. – 2017. – Vol. 768. – P. 280–287.

8. Gumjudpai B. Cosmology of non-minimal derivative coupling to gravity in Palatini formalism // B. Gumjudpai, N. Kaewkhao. – Access mode: arXiv:1608.04014 [gr-qc].

9. Wang P. A new extended quintessence / P. Wang, P. Wu, H. Yu // The European Physical Journal C. – 2012. – Vol. 72. – P. 2245.

10. Bauer F. Inflation with non-minimal coupling: Metric vs. Palatini formulations / F. Bauer, D.A. Demir // Physics Letters B. – 2008. – Vol. 665, No 4. – P. 222-226.

NON-MINIMAL GRAVITATIONAL INTERACTION AND NON-METRICITY

D.V. Gal'tsov, S.M. Zhidkova

*The interaction of material fields with gravitation can be considered both within the framework of a metric formalism, using a connection consistent with the metric, and in a first-order formalism in which connectivity is introduced as an independent field whose dynamics are determined from the action. At the same time, if this interaction is not minimal, then we can obtain essentially different theories. Here we discuss the case of a non-minimally bound scalar field in the framework of the shortened Horndeski model, considered earlier by Sushkov and other authors in the context of cosmology. We show that in the case when the constant of the nonminimal interaction is small, the theories of the first and second order coincide, but in the limit of a strong nonminimal coupling they are essentially different, while in the first-order formalism the higher derivatives remain in the field equations.*

Keywords: non-minimal gravitational interaction, non-metricity.